OSCILACIONES AMORTIGUADAS. PENDULO DE POHL

1.- INTRODUCCION TEÓRICA

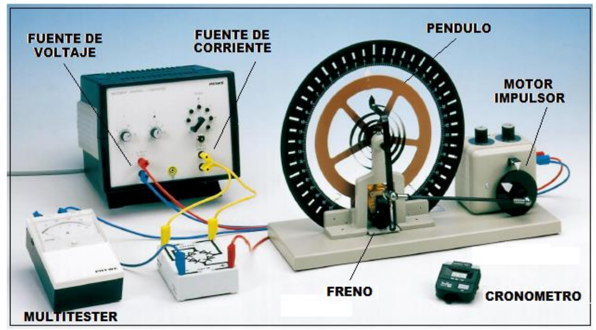

figura 1

El Péndulo de Pohl de la figura 1 permite estudiar las oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas de baja frecuencia producidas mediante un péndulo de torsión. Un freno electromagnético simula diferentes medios viscosos. Un motor eléctrico suministra al oscilador un forzamiento externo periódico que permite observar los fenómenos de resonancia cuando la frecuencia impulsora se aproxima a la frecuencia natural del oscilador

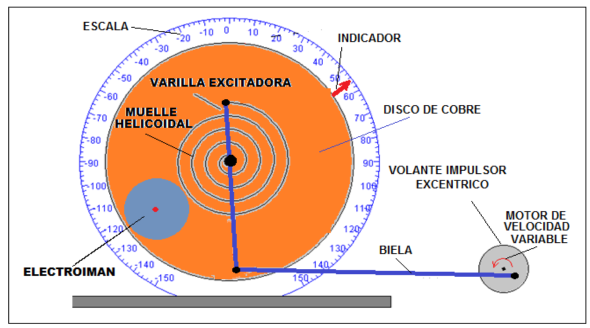

figura 2

La figura 2 muestra un esquema de dicho péndulo, el cual consiste en un sistema oscilante que consta de un anillo de cobre unido a un muelle helicoidal que puede girar alrededor de un eje horizontal.

El disco se frena mediante las corrientes de Foucault que genera el campo magnético producido por una bobina en el anillo de cobre. El momento de las fuerzas que ejerce el campo magnético sobre las corrientes inducidas es proporcional a la velocidad angular de rotación y de sentido contrario a ésta. La intensidad del campo magnético es proporcional a la corriente i que pasa por la bobina, la fuerza sobre dichas corrientes es también proporcional al campo magnético. El momento de frenado es proporcional, por tanto, al cuadrado de la intensidad de la corriente que pasa por la bobina.

En la presente práctica de laboratorio se estudia la dinámica de un movimiento oscilatorio amortiguado en el *Péndulo de Pohl*.

Oscilaciones amortiguadas

Si se desplaza el disco de la posición de equilibrio y se suelta, la ecuación de la dinámica de rotación del anillo de cobre es $\sum \vec{\tau} = I\alpha$

$$I\,\alpha = -k\,\theta - \lambda\,\omega \qquad (1)$$, donde

α : es la aceleración angular del disco cuando el indicador del péndulo se encuentra en la posición angular θ.

I : es el momento de inercia del anillo respecto del eje de rotación.

k : es la constante del muelle helicoidal.

$\lambda\,\omega$: es el momento de rozamiento proporcional a la velocidad angular ω de rotación, debidos a las corrientes de Foucault producidas en el anillo de cobre por el campo magnético de la bobina.

La ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial, es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{I} \qquad 2\gamma = \frac{\lambda}{I} \qquad (2)$$

Dónde:

ω_0 : es la frecuencia natural o propia del oscilador, en ausencia de amortiguación dada por el freno magnético, es decir, cuando no se conecta la bobina a la fuente de alimentación de corriente continua

γ : es la constante de amortiguamiento.

La solución de la ecuación diferencial (2) si $\gamma < \omega_0$ es:

$\theta = \theta_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t - \phi)$ (3), donde θ_0 es la amplitud angular inicial; ϕ es la fase inicial y $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (4) es la frecuencia de oscilación del péndulo amortiguado.

Llamaremos $\theta_{\max} = \theta_0 e^{-\gamma t}$ (5)

Si $\gamma < \omega_0$, se dice que es una oscilación amortiguada, como se observa en la figura 3

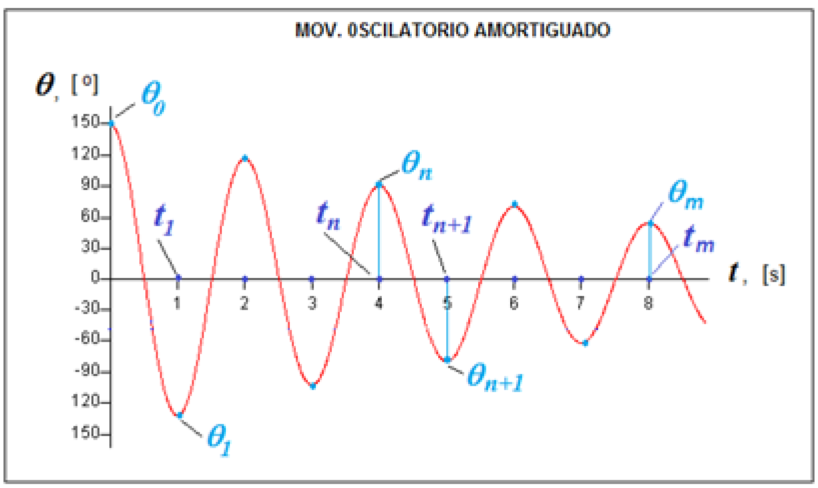

figura 3

Las distintas soluciones de la ecuación (2) vienen dadas por:

a) Oscilación natural, Si $\gamma \to 0$

Si $\gamma \to 0$, La solución de la ecuación de movimiento es:

$$\theta = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \omega^2 = \omega_0^2$$

Donde las constantes son: $A = \theta_o$ y $\varphi = \pi/2$

b) Oscilación amortiguada, Si $\gamma < \omega_o$

Si $\gamma < \omega_o$, la solución de la ecuación de movimiento es:

$$\theta = Ae^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\varpi t + \varphi) \qquad \varpi^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Donde las constantes son: $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\varpi}{\gamma}\right) \qquad A = \frac{\theta_0}{\operatorname{sen}\varphi}$

c) Oscilación crítica, Si $\gamma = \omega_0$

Si $\gamma = \omega_0$, la solución de la ecuación de movimiento es:

$$\theta = (At + B)e^{-\gamma t}$$

Donde las constantes son $A= \theta_o\,\gamma \quad B= \theta_o$

La solución queda como: $\theta = \theta_0(\gamma t + 1)e^{-\gamma t}$

El oscilador tiende a la posición de equilibrio $\theta=0$, después de un tiempo $t \to \infty$, sin oscilar

d) Oscilación sobreamamortiguada. Si $\gamma > \omega_0$

Si $\gamma > \omega_0$, la solución de la ecuación de movimiento es:

$$\theta = (Ae^{-\beta t} + Be^{\beta t})e^{-\gamma t} \qquad \beta^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

Al determinar las constantes la solución queda como

$$\theta = \frac{\theta_0}{2}\left\{\left(1 - \frac{\gamma}{\varpi}\right)e^{-\beta t} + \left(1 + \frac{\gamma}{\varpi}\right)e^{-\beta t}\right\}e^{-\gamma t}$$

El oscilador tiende a la posición de equilibrio $\theta=0,$ y despés está un tiempo $t \to \infty$, sin oscilar.

La figura 4 muestra un ejemplo de los 4 casos de movimientos oscilatorios

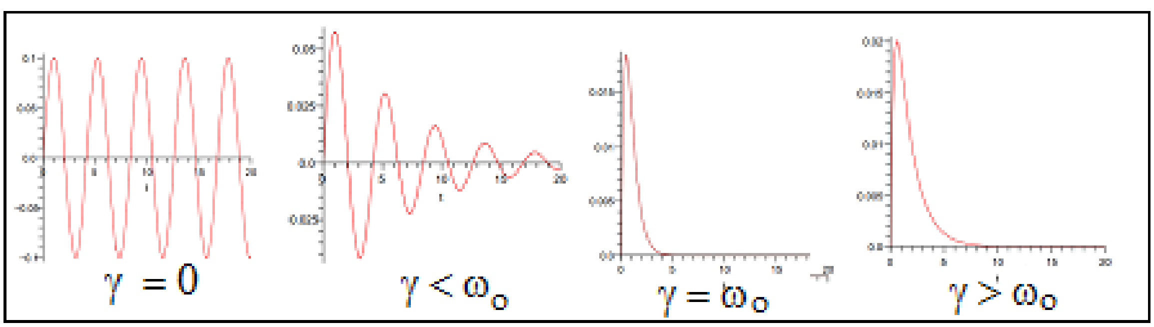

figura 4

2.- EXPERIMENTACIÓN

2.1.- Materiales y Equipos necesarios

1 Péndulo de torsión: con volante de inercia de cobre, muelle espiral y una escala angular graduada en unidad arbitraria (u.a.)
1 Freno electromagnético, con bobinas y núcleo magnético
1 Motor con excéntrica para estudio de oscilaciones forzadas
1 Fuente de alimentación regulable,(i < 2 [A]), suministra intensidad de corriente
al freno electromagnético (i controla la constante de amortiguación γ)
1 Fuente de alimentación regulable, (V < 24 [V]), suministra voltaje al motor,
(V controla la frecuencia impulsora para el estudio de oscilaciones forzadas)
1 Voltímetro
1 Amperímetro
1 Cronometro de precisión
6 Cables largos
1 Sistema de adquisición de datos Pasco

2.2.- Objetivos

- Identificar los distintos regímenes de oscilaciones en que se observarían: movimiento armónico simple, oscilatorio amortiguado, crítico o sobreamortiguado
- Determinar para cada corriente la constante de amortiguamiento
- Determinar la relación entre la constante de amortiguación γ, y la corriente de amortiguación I

2.3.- Procedimiento

- **a) Identificar los distintos regímenes de oscilaciones en que se observaría movimiento armónico simple, oscilatorio amortiguado, crítico o sobreamortiguado**

Nota: No asigne fuente de alimentación al motor eléctrico que ejerce un torque externo periódico al sistema

1.- Armar el montaje de los equipos como muestra la figura 1
2.- Conecte la fuente de corriente al freno magnético.
3.- Para familiarizarse con el sistema estudiado, desplace el péndulo de la posición de equilibrio y suéltelo sin haber encendido el freno magnético. Observe que pasa con la amplitud de oscilación. ¿De qué tipo de movimiento se trata?
3.- Asignar a la fuente de alimentación del freno, una corriente $i = 0,5$ [A] y realice el procedimiento anterior. ¿Qué observa ahora?

4.- Aumente el valor de la corriente a 1,5 A y observe. Haga lo mismo para una corriente de 2 A
5.- ¿Es capaz de identificar los distintos tipos de oscilaciones?
Complete la tabla 1

- b) **Determinar para cada corriente la constante de amortiguamiento**

1.- Fije la corriente en 0,1 A
2.- Desplace el péndulo de la posición de equilibrio hasta un valor de θ_0 de 14 [u.a.], y mida el tiempo que tarda en realizar 10 oscilaciones. Divida ese tiempo entre las 10 oscilaciones y obtendrá el periodo de oscilación $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$
3.- Nuevamente, desplazar el disco de cobre hasta que el indicador marque una amplitud angular máxima θ_o = 14[u.a.], y registre la amplitud angular después de una oscilación completa $\theta_{\max}(T_1)$.
4.- Repita el procedimiento para obtener las amplitudes máximas de oscilaciones $\theta_{\max}(2T_1)$, $\theta_{\max}(3T_1)$, $\theta_{\max}(4T_1)$, $\theta_{\max}(5T_1)$,etc
5.- Construya una tabla de valores de $\theta_{\max}(t)$ versus t, para los distintos periodos
6.- Repita el procedimiento anterior (Pasos 2, 3, 4, 5) para otros valores de corriente. Se sugiere I= 0,2A; I= 0,3A; I=0,4A; I=0,5A.
Complete la table 2

2.4-Análisis:

i. Para cada uno de los valores de corriente anterior, construya en Data Studio una gráfica $\theta_{\max}(t)$ versus t,. Describa que observa. Realice un ajuste exponencial de la forma $Y = Ae^{-CX} + B$, con B=0. Anote el valor de C
ii. ¿Qué significado físico tiene esta constante C?
iii. Mediante el procedimiento anterior construya una tabla de valores , donde para cada valor de Corriente I, tenga su respectivo constante de amortiguamiento γ. **Complete tabla 3**

c) Determinar la relación entre la constante de amortiguación γ, y la corriente de I

Grafique en Data Studio la constante de amortiguación γ, versus la corriente I. ¿Qué tipo de relación observa?. Realice el ajuste más apropiado. Encuentre la relación funcional entre γ e I. (relación cuadrática del tipo $\gamma = A\,I^2 + B$)

2.5- Conclusiones

De acuerdo a las mediciones y cálculos realizados se puede dar respuesta a las siguientes preguntas:

1.- ¿Qué tipos de movimientos oscilatorios se pueden estudiar con el Péndulo de Pohl?
2.- ¿Para qué valores de la corriente de frenado se obtienen los diversos tipos de movimientos oscilatorios?
3.- ¿Para la corriente de frenado $i = 0$, la constante de amortiguación es nula?. Indique cuales podrían ser las posibles causas de que $\gamma > 0$
4.- ¿Conocida la constante γ y el periodo T, de una oscilación amortiguada, se puede calcular la frecuencia natural ω_o del pendulo?. Calcule ω_o
5.- ¿De qué parámetros físicos depende ω_o ?
6.- ¿Qué tipo de relación funcional existe entre la constante de amortiguación γ y la corriente de frenado i
7.- ¿Para la relación funcional ajustada por mínimos cuadrados, estime el valor de la constante de amortiguación γ para la corriente de frenado i = 0,7 [A] Compare resultados.

HOJA DE RESPUESTA N°2

MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO

NOMBRE:……………………………………………………………...RUT:………...

NOMBRE:…………………………………………..…………RUT:…………

Tabla 1: Tipo de movimiento oscilatorio según la corriente de amortiguación

Ampl. Angular inicial			Marque el tipo de oscilación, (con X)			
Nº Med.	Corriente i [A]	Nº Osc. al detenerse	M,A.S.	Osc. Amort.	Osc. Critico	Osc. Sobreamort.
1	0					
2	0.5					
3	1.0					
4	1.5					
5	2.0					

Tabla 2: Ángulo máximo alcanzado en el "enésimo" punto de retorno versus el tiempo nT, siendo T=tiempo total/10 oscilaciones

Corriente *i* [A]	Punto retorno *n*	Angulo θ_{max} [u.a.]	Tiempo t_n =nT [s]	Corriente *i* [A]	Punto retorno n	Angulo θ_{max} [u.a.]	Tiempo t_n =nT [s]
0.1 Tiempo en dar 10 oscilaciones: t T= t/10	1			0.3 Tiempo en dar 10 oscilaciones: t T= t/10	1		
	2				2		
	3				3		
	4				4		

Corriente *i* [A]	Punto retorno *n*	Angulo θ_{max} [u.a.].]	Tiempo t_n =nT [s]	Corriente *i* [A]	Punto retorno *n*	Angulo θ_{max} [u.a.]	Tiempo t_n =nT [s]
0,2 Tiempo en dar 10 oscilaciones: t T= t/10	1			0,4	1		
	2				2		
	3				3		
	4				4		

Corriente *i* [A]	Punto retorno *n*	Angulo θ_{max} [u.a.]	Tiempo t_n =nT [s]	Corriente *i* [A]	Punto retorno n	Angulo θ_{max} [u.a.]	Tiempo t_n =nT [s]
0.5 Tiempo en dar 10 oscilaciones: t T= t/10	1			0.7 Tiempo en dar 10 oscilaciones: t T= t/10	1		
	2				2		
	3				3		

Tabla 3: Constante de amortiguación γ, en función de la corriente *i*, (resumen)

Corriente ***i***, [A]						Ajuste cuadrático $\gamma = A\, i^2 + B$ *A=* , *B=*
Cte. Amortiguación γ, [1/s]						

NOTA: Guarde sus resultados para el próximo laboratorio