PRÁCTICA Nº 2
PENDULO SIMPLE

1.- INTRODUCCION TEORICA

El Péndulo Simple o Matemático es un modelo idealizado de un sistema más complejo, y consiste en una masa puntual m suspendida de un hilo inextensible y sin masa, de longitud L. Dicho modelo idealizado, no existe realmente, aunque algunos péndulos reales se pueden aproximar bastante.

Consideremos un péndulo simple, como el representado en la Figura 1. Si desplazamos la partícula desde la posición de equilibrio hasta que el hilo forme un ángulo Θ con la vertical, y luego la abandonamos partiendo del reposo, el péndulo oscilará en un plano vertical bajo la acción de la gravedad g. Las oscilaciones tendrán lugar entre las posiciones extremas $+\Theta$ y $-\Theta$, simétricas respecto a la vertical, a lo largo de un arco de circunferencia cuyo radio es la longitud, L, del hilo. El movimiento es periódico, pero no podemos asegurar que sea armónico.

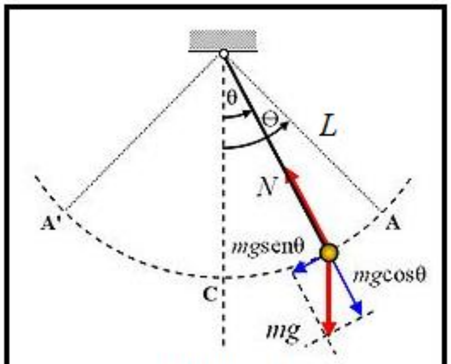


figura 1

Para determinar la naturaleza de las oscilaciones deberemos escribir la ecuación del movimiento de la partícula. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo la acción de dos fuerzas: su propio peso (mg) y la tensión del hilo (N), siendo la fuerza motriz la componente tangencial del peso. Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos:

$$F_t = -mg\sin\theta = ma_t$$

siendo a_t, la aceleración tangencial y donde hemos incluido el signo negativo para manifestar que la fuerza tangencial tiene siempre sentido opuesto al desplazamiento (fuerza recuperadora).

Al tratarse de un movimiento circular, podemos poner

$$a_t = L\ddot{\theta}$$

siendo $\ddot{\theta}$ la aceleración angular, de modo que la ec. dif. del movimiento es:

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación diferencial **no** corresponde a un movimiento armónico simple (m.a.s.) debido a la presencia de la función seno, de modo que podemos asegurar que el movimiento del péndulo simple no es armónico simple y la masa no interviene en el movimiento del péndulo.

Oscilaciones pequeñas

Si consideramos tan sólo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo θ sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor del sen θ será muy próximo al valor de θ expresado en radianes (sen$\theta \approx \theta$, para θ suficientemente pequeño), en tal caso la ecuación diferencial, (1), del movimiento se reduce a

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0 \qquad (2)$$

que es idéntica a la ec. dif. correspondiente al m.a.s., refiriéndose ahora al movimiento angular en lugar de al movimiento rectilíneo, cuya solución es:

$$\theta = \Theta \sin(\omega t + \phi) \qquad (3)$$

siendo ω la frecuencia angular de las oscilaciones, a partir de la cual determinamos el período de las mismas:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (4)$$

Las magnitudes Θ y ϕ son dos constantes "arbitrarias" (determinadas por las condiciones iniciales) correspondientes a la amplitud angular y a la fase inicial del movimiento. Ambas tienen dimensiones de ángulo plano.

Obsérvese que el periodo del péndulo simple es independiente de la masa de la partícula suspendida y, también, de la amplitud de las oscilaciones, siempre que éstas sean suficientemente pequeñas como para que la aproximación sen$\theta \approx \theta$ sea aceptable. Esta última propiedad, es conocida como *isocronismo de las pequeñas* oscilaciones

Oscilaciones de mayor amplitud

La integración de la ecuación del movimiento, sin la aproximación de pequeñas oscilaciones, (1), es muy complicada e involucra integrales elípticas de primera especie, por lo que omitimos el desarrollo que llevaría a la siguiente solución

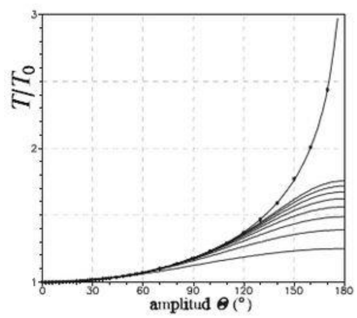
$$T = T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\Theta}{2} + \ldots\right] \qquad (5)$$

donde Θ es la amplitud angular

La tabla siguiente muestra el periodo de oscilación exacto del péndulo simple para diferentes amplitudes de oscilación

θ	T/T_0
0°	1.0000
6°	1.0007
12°	1.0027
18°	1.0062
26°	1.0131
32°	1.0199
40°	1.0313

:



Dependencia del período del péndulo con la amplitud angular de las oscilaciones. Para pequeñas oscilaciones, el cociente T/T_0 tiende a la unidad 1; pero tiende a infinito para ángulos cercanos a 180º.

Se observará que el periodo T difiere significativamente del correspondiente a las oscilaciones de pequeña amplitud (T_0) cuando Θ > 20º. Para valores de Θ suficientemente pequeños, la serie converge muy rápidamente; en esas condiciones será suficiente tomar tan sólo el primer término correctivo e, incluso, sustituir senΘ/2 por Θ/2, de modo que tendremos

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\Theta^2}{16}\right) \qquad (6)$$

donde Θ se expresará en radianes. Esta aproximación resulta apropiada en gran parte de las situaciones que encontramos en la práctica; de hecho, la corrección que introduce el término $\Theta^2/16$ representa menos de 0.2% para amplitudes inferiores a 10°.

2.- EXPERIMENTACIÓN

2.1.- Materiales y Equipos necesarios

1 Soporte para varillas
2 Portanueces
1 Cronómetro
Hilo fino y resistente (1.5 m)
1 Fotopuerta Pasco ME-8752
1 Cilindro de diámetro 1,6 mm, con gancho para fijar hilo
1 Regla milimétrica
1 Transportador semicircular para medir ángulos
1 Sistema de adquisición de datos Pasco

2.2.- Objetivos

- Determinar la relación entre el periodo del péndulo y el largo del péndulo
- Determinar la aceleración del lugar con el péndulo simple
- Determinar la relación entre el periodo del péndulo y la amplitud inicial del péndulo. Determinar un rango de validez para las ecuaciones (4) y (6)

2.3.- Procedimiento

1. Colocar el transportador para medir ángulos en el soporte del péndulo de forma que se puedan medir cómodamente los ángulos de oscilación.
2. Coloque la fotopuerta de tal manera que el péndulo en su parte más baja del recorrido pase por la fotopuerta. Conecte la fotopuerta a uno de los canales de la interfase 750 y de las instrucciones a Data Studio, que permitan medir el período del péndulo, medido a través de la fotopuerta.

a) Relación entre el periodo del péndulo y el largo del péndulo

1. Para un misma amplitud inicial de desviación del péndulo,(Θ =6^o) y sin cambiar la masa del péndulo, (elija una de las masas), determinar los períodos de oscilación para diversos largos, (L= 20, 30, 40, 50, 60, 70 y 80 [cm]), rellenando la tabla de valores 1
2. Realice una gráfica del cuadrado de periodo T^2 versus el largo L. ¿Qué tipo de relación hay entre las variables?. Realice un ajuste proporcional, anotando la constante del ajuste.

b) Determinación de la aceleración de gravedad, g, del lugar

De la ecuación (4), se observa que al graficar T^2 en función de L, se obtiene una relación proporcional, pues se cumple:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) L$$

Al realizar un ajuste proporcional, de mínimos cuadrados, se determina el factor de proporcionalidad $A = 4\pi^2/g$, con su respectivo error, calculándose la aceleración de gravedad del lugar, g, con su error, utilizando la expresión $g = 4\pi^2/A$ y propagación de errores

c) Relación entre el periodo del péndulo y la amplitud inicial de la masa oscilante. Determinación del rango de validez para las ecuaciones 5 y 6

1. Para una misma longitud del hilo, (L =0,4 [m]), y sin cambiar la masa del péndulo, (elija una de las masas), determinar los períodos medios de oscilación para diversos ángulos iniciales, (Θ=4°, 6°, 8°, 10°, 15° , 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°), Completando la tabla 2. Asegúrese de que el movimiento del péndulo se realice en un plano
2. En la tercera columna calcule la aceleración de gravedad a partir de la ecuación (4) $g^{I} = \dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$
3. En la cuarta columna calcule la aceleración de gravedad a partir de la ecuación (6) $g^{II} = \dfrac{4\pi^2 L}{T^2}(1+\dfrac{1}{16}\theta_0^2)^2$, considerando que el ángulo o amplitud inicial θ_0 debe ir en radianes
4. Realice una gráfica de g^{I} versus θ_0. ¿Qué observa?.
5. Calcule el error porcentual que se comete para cada valor de la amplitud $E_{\%} = \dfrac{|g^{I} - g_T|}{g_T}\cdot 100$ y grafique ese error porcentual versus E% versus θ_0. En la medida que aumenta la amplitud inicial, ¿qué ocurre con el error porcentual?
6. Realice una gráfica de g^{II} versus θ_0. ¿Qué observa?. Discuta los resultados
7. Calcule el error porcentual que se comete para cada valor de la amplitud, utilizando la expresión $E_{\%} = \dfrac{|g^{II} - g_T|}{g_T}\cdot 100$ y grafique ese error porcentual versus E% versus θ_0.
8. Concluya para qué rango de amplitudes iniciales θ_0 es válida la ecuación (4) para el cálculo del periodo
9. ¿Cuánto mejora la estimación de g, usando la expresión dependiente de la amplitud
10. Analice las fuentes de error presentes en el experimento. ¿Cuáles son las más importantes?. Discuta.

HOJA DE RESPUESTA N°2
PENDULO SIMPLE

NOMBRE:………………………………………………………………..RUT:………………...

NOMBRE:………………………………………………………………..RUT:………………...

Tabla 1: ***Relación entre el periodo del péndulo y el largo del péndulo***

Amplitud inicial, $\Theta = 6$ [º]			Masa m = [kg]
Largo, L [m]		Periodo promedio. T, [s]	Periodo al cuadrado. T^2, [s^2]
L_1	0,2	±	±
L_2	0,3	±	±
L_3	0,4	±	±
L_4	0,5	±	±
L_5	0,6	±	±
L_6	0,7	±	±
L_7	0,8	±	±
Ajuste proporcional, $T^2 = A\,L$, $A = 4\pi^2/g$ $A =$ ± [s^2/m]			**Cálculo de g,** $g = 4\pi^2/A$ $g =$ ± [m/s^2]

Tabla 2: *Relación entre el periodo del péndulo y la amplitud inicial*

Largo L = 0,4 [m]						
Amplitud inicial θ_0		Periodo medio T(s)	$g^I = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$	$g^{II} = \frac{4\pi^2 L}{T^2}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2)^2$	$E_{\%} = \frac{\lvert g^I - g_T \rvert}{g_T} \cdot 100$	$E_{\%} = \frac{\lvert g^{II} - g_T \rvert}{g_T} \cdot 100$
Θ_1	4					
Θ_2	6					
Θ_3	8					
Θ_4	10					
Θ_5	15					
Θ_6	20					
$\Theta 1$	25					
$\Theta 2$	30					
$\Theta 3$	35					
$\Theta 4$	40					
$\Theta 5$	45					
$\Theta 6$	50					
$\Theta 6$	55					

Realice las gráficas requeridas en este espacio